



**Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"**  
**profil servicii, tehnologic, științe ale naturii**  
**Etapa locală - 20 februarie 2015**

**Clasa a XII-a**

1. Pe mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$ , se definește legea de compoziție  $x \circ y = 3xy + 4x + 4y + 4$ .

- a) Să se determine numărul elementelor din  $\mathbb{Z}$ , simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ";  
b) Ținând cont că legea de compoziție este asociativă, să se rezolve ecuația  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2015 \text{ termeni}} = -1$ .

2. Fie mulțimea  $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ .

a) Să se demonstreze că  $G$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Să se calculeze  $(A(2))^{2015}$ .

c) Știind că  $(G, \cdot)$  este grup abelian, să se arate că  $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$ .

3. a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , pentru care funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \leq 1 \\ \ln(x^2 + x - 1) + ax + b, & x > 1 \end{cases}$

este o primitivă a unei funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

b) Să se calculeze integralele nedefinite:  $I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  și  $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

4. a) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} [\ln x] dx$ .

b) Să se demonstreze că:  $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1-x^2} dx \leq 1 + e$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.